Escritura de ecuaciones de problemas de algebraicos

Herbert Mendía A.
2011-10-12
www.cimacien.org.gt

Conocimientos previos necesarios

- Operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división.
- Jerarquía de las operaciones.
- Proporcionalidad y porcentajes.
- Procesos de resolución de ecuaciones lineales o sencillas.

Introducción

Es frecuente la dificultad que experimentamos para escribir la ecuación que está asociada a un problema expresado en palabras. Ejemplos de este tipo de problemas son:

1. Tengo $ 18.00 en monedas de 10 y 25 centavos. Si el número de monedas de 10 es el doble de las de 25 ¿Cuántas monedas de cada clase tengo?
2. Una mujer de negocios desea invertir $ 30,000.00 en dos fondos diferentes que producen ganancias anuales de 13% y 15.5%, respectivamente ¿Cuánto debe invertir en cada fondo para obtener una ganancia de $ 4,350.00 después de un año?
3. Un corredor empieza a correr en cierto lugar, a una velocidad constante de 6 millas por hora. Cinco minutos más tarde, un segundo corredor sale del mismo lugar y hace el mismo recorrido a una velocidad de 8 millas por hora ¿En cuánto tiempo alcanza el segundo corredor al primero?
4. Un anillo hecho de oro y plata pesa 80 g (gramos). Midiendo el desplazamiento de agua causado por el anillo se ha determinado que tiene un volumen de 5 centímetros cúbicos. La densidad del oro es de 19.3 g/cm 3 , y la de la plata es 10.5 g/cm 3 ¿Cuántos gramos de oro contiene el anillo?

La mayoría de los problemas tiene una estructura y el reconocimiento de sus componentes ayuda a superar la dificultad de escribir la ecuación, así como el convencerse de que las operaciones, los números y las variables son herramientas útiles para la descripción de diversas situaciones de la realidad. Este par de ideas son las que se pretende se desarrollar y aclarar en este escrito.

Los problemas que tengan datos numéricos que se tendrá que resolver en la escuela y en la vida diaria son, en su mayoría, diferentes entre sí. Algunos son problemas de precios, otros de inversiones, o de pesos, de edades, de repartos, de tiempos, de velocidades, de porcentajes y un gran etcétera. Cada vez que resolvemos otro problema, será diferente de los que ya hemos resuelto con anterioridad. Para poder enfrentar la novedad de los problemas a resolver es necesario reconocer los elementos que los componen, de tal manera que lo que hemos aprendido al resolver alguno, podamos aplicarlo a cada nuevo problema. Esa es la intención detrás de las dos ideas que se pretende desarrollar en este escrito.

Reconocimiento de los componentes de un problema

1. Reconocer lo que se busca en el problema

Cuando se enfrenta un determinado problema, que describe con palabras una situación familiar, el **primer y fundamental paso** para resolverlo es identificar lo que se desea encontrar, es decir, se debe identificar la pregunta del problema.

Ejemplo:

5. A la presentación de una película de horror asistieron seiscientas personas. El costo de los boletos para adulto fue de 5 pesos, mientras que los niños pagaron solamente 2 pesos. Si la taquilla del cine recibió $ 2,400.00 ¿Cuántos niños asistieron a la presentación?

En este caso el problema describe una situación conocida por todos los que han asistido al cine. Y pide encontrar el número de niños que asistieron a la presentación, esa es la pregunta del problema.

Note que después de leer con atención el problema se concluye que lo que se pide encontrar está descrito en la pregunta, muchas veces escrita entre los signos de interrogación. Para el problema 5 se pide encontrar un número que representa la cantidad de niños que asistieron a la presentación. La situación es conocida y juzgamos que sí es posible encontrar la solución.

Otro ejemplo,

6. A un repartidor de periódicos le toma 45 minutos entregar los periódicos que le corresponden, sin embargo, si su hermana le ayuda, les toma solamente 20 minutos ¿Cuánto tiempo le tomaría a su hermana entregar ella sola los periódicos?

Leyendo con atención lo escrito entre los signos de interrogación, encontramos que allí se describe lo que se busca: la cantidad de minutos (horas, segundos u otra medida de tiempo) que tardaría a la hermana para repartir los periódicos ella sola. De nuevo, se pide un número, en este caso ese número representa lo que tarda la hermana en repartir los periódicos.

2. Reconocer las condiciones que establece el problema

Las condiciones del problema son requisitos (o exigencias) que debe cumplir la solución para ser considerada como tal, por ejemplo, si se encarga a alguien que compre un pastel de fresa cuyo precio sean menor de $ 40.00 y luego lleva un pastel de naranja de precio $ 30.00 ese pastel no es aceptable puesto no es de fresa (condición 1) aunque cumpla la condición de precio (condición 2), si lleva un pastel de fresa de precio $ 45.00 tampoco es aceptable. Las condiciones son los criterios para evaluar si lo que se propone o presenta como solución realmente lo es.

En los problemas algebraicos, las condiciones del problema son requisitos que deben cumplir los números que serán su solución. Estas condiciones dan pistas o indicaciones para buscar la solución. Tomemos, por ejemplo, el problema 1

1. Tengo $ 18.00 en monedas de 10 y 25 centavos. Si el número de monedas de 10 es el doble de las de 25 ¿Cuántas monedas de cada clase tengo?

El problema pide encontrar dos números:

número de monedas de 10 centavos,
número de monedas de 25 centavos.

pero note que no cualquier par de números será la solución, sin solamente cuando esos números de monedas:

Condición 1
Sumen en total $ 18.00 que está escrito como: Tengo $ 18.00

Condición 2
Y la cantidad de monedas de 10 sea el doble de monedas de 25, que está escrito como: el número de monedas de 10 es el doble de las de 25.

Esas son las dos condiciones que deben cumplir los números que serán la solución de este problema particular. Esas condiciones sirven para verificar si un par de números cualesquiera son solución del problema. Si el par de números no cumple las condiciones impuestas, no es solución.

3. Reconocer la situación descrita en el problema

Un problema relata una situación (supuestamente) familiar para el lector, la cual es descrita con algunos detalles en la trama del problema. Es importante poder imaginar la situación relatada y asociarla con situaciones semejantes ya vividas. Si no se conoce la situación de la trama del problema se debe investigar sobre ella para llegar a conocerla y saber las relaciones que se dan entre sus elementos. Escribir la ecuación de un problema que relata una situación que no es familiar es muy difícil.

Que la situación sea familiar permite proponer las operaciones que serán necesarias para verificar el cumplimiento de las condiciones del problema, por ejemplo, en el problema 1 se requiere que la suma del dinero aportado por las monedas sea en total $ 18.00 que es la condición 1. Como se conoce la situación descrita que se relaciona con monedas, pesos, totales, dinero, y demás; se sabe que para calcular el total de dinero que se tiene se debe:

- ✓ multiplicar por 0.10 el número de monedas de 10 para calcular con cuántos pesos contribuyen esas monedas,
- ✓ multiplicar por 0.25 el número de monedas de 25 para calcular con cuántos pesos contribuyen esas monedas,
- ✓ sumar la contribución de las monedas de 10 con las de 25 para obtener el total de dinero que se tiene.

Sin el conocimiento de cómo se maneja dinero, cómo contarlo, cómo calcular totales y lo relacionado con el dinero, es difícil proponer las operaciones necesarias para verificar las condiciones del problema y así será difícil escribir la ecuación asociada al problema. El conocer la situación descrita da sentido a las operaciones implicadas.

4. Reconocer los posibles datos adicionales del problema

En el problema 2 (escrito abajo) son datos adicionales las tasas de interés del 13% y 15.5% con los cuales se verificará que se cumplan las condición requeridas en el problema

2. Una mujer de negocios desea invertir $ 30,000.00 en dos fondos diferentes que producen ganancias anuales de 13% y 15.5%, respectivamente ¿Cuánto debe invertir en cada fondo para obtener una ganancia de $ 4,350.00 después de un año?

En el problema 6 los datos adicionales son los 45 minutos de tiempo de entrega del hermano, los 20 minutos de trabajo conjunto, pero no está escrito un dato adicional que parece ser importante: el número de periódicos a repartir, sólo esta escrito entregar los periódicos que le corresponden. Cuando no está escrito algún dato que parece ser importante, le damos un valor arbitrario y analizamos que sucede con la solución del problema al dar ese valor arbitrario, como se hará más adelante.

Resumiendo lo anterior, hemos llegado a que en un problema expresado con palabras hay 4 componentes:

- ✓ una o más preguntas, que indica(n) lo que se desea encontrar,
- ✓ una o más condiciones que se deben satisfacer por los valores que se desea encontrar y que serán la solución,
- ✓ la descripción de una situación, que será la que dará sentido a las cantidades y operaciones que se realizarán con esas cantidades. La situación debe ser conocida y comprendida para proponer las operaciones necesarias,
- ✓ datos adicionales del problema.

Ejercicio

Identifique lo que se busca, las condiciones, la situación y los datos adicionales, en cada uno de los problemas del 1 al 10.

7. Una profesora tiene 120 chocolates y 192 caramelos que va a repartir entre sus estudiantes. Si cada estudiante recibe 3 caramelos más que chocolates ¿Cuántos son los estudiantes?
8. Un joven se encuentra a 228 m de otro cuando ambos empiezan a caminar, uno en dirección del otro. Si caminan a una velocidad de 1.5 y 2 metros por segundo, respectivamente ¿En cuánto tiempo se encuentran? ¿Qué distancia ha caminada cada uno?
9. Si una máquina puede llenar y tapar 20 botellas por minuto y otra máquina puede llenar y tapar 30 por minuto ¿Cuánto tiempo les tomará completar una orden de 30,000 botellas si trabajan las dos máquinas?
10. Una persona que invierte una cantidad de dinero para comprar 200 acciones de Exclusivos le sobran $ 5000.00, pero si compra con la misma cantidad de dinero 100 acciones de Gigante que cuestan cada una $ 420.00 más que las de Exclusivos, le sobrarían $ 8000.00 ¿Qué cantidad de dinero tiene el inversionista antes de decidirse a invertir?

Pasos para la escritura de la ecuación

1. Suponer una solución

Dado que al leer con atención el problema hemos comprendido y juzgamos que conocemos la situación descrita en el argumento y que si es posible encontrar su solución, el **primer paso** para escribir la ecuación es:

proponer un número o números que podrían ser la solución del problema.

La propuesta de esos números es una CONJETURA, una SUPOSICIÓN, no se le pide que adivine la solución, si que debe proponer los valores de los números buscados, no calcularlos ni pensarlos más de 10 segundos, simplemente proponerlos “a dedo”. Los valores propuestos NO son necesariamente la solución, sino números escogidos casi al azar.

Tomemos como ejemplo el problema 1.

Tengo $ 18.00 en monedas de 10 y 25 centavos. Si el número de monedas de 10 es el doble de las de 25 ¿Cuántas monedas de cada clase tengo?

Todos conocemos las monedas y el dinero. La solución del problema requiere dos números ¿Cuántas monedas de cada clase tengo?:

un número es la cantidad de monedas de 10 centavos que se tienen,
el otro número es la cantidad de monedas de 25 centavos que se tienen,

Podemos suponer y proponer dos números cualesquiera para solución del problema:

proponer
12 monedas de 10 centavos y 34 monedas de 25 centavos,
o bien, proponer
41 monedas de 10 centavos y 17 monedas de 25 centavos,
o bien, proponer
cualquier otro par de números,

ESTO NO QUIERE DECIR QUE ADIVINAREMOS LA SOLUCION, sino simplemente que proponemos una posible solución dado que hemos comprendido la situación descrita en el argumento del problema y los que el problema pide como solución: dos números y proponemos dos números cualesquiera.

<u>Ejercicio</u>
Proponga soluciones supuestas para los problemas 1 a 10 anteriores.

2. Efectuar las operaciones necesarias para verificar si la supuesta solución cumple las condiciones del problema

En lo que sigue nuestro objetivo será VERIFICAR si los números propuestos son o no la verdadera solución del problema. La verdadera solución cumple con todo lo descrito en el argumento del problema.

Como establecimos anteriormente, el problema 1 tiene dos condiciones, las que escribimos nuevamente:

Condición 1
Sumen en total $ 18.00 que está escrito como: Tengo $ 18.00

Condición 2
Y la cantidad de monedas de 10 sea el doble de monedas de 25, que está escrito como: el número de monedas de 10 es el doble de las de 25.

Habiendo recordado las condiciones del problema, ahora tomemos la primera suposición que propusimos para el problema 1:

12 monedas de 10 centavos y 34 monedas de 25 centavos

y verifiquemos si los valores propuestos cumplen las condiciones del problema.

La condición 2 establece que el número de monedas de 10 es el doble de las de 25

por lo que si tenemos 34 monedas de 25 centavos, debemos tener el doble de monedas de 10 ¿Cómo calculamos el doble? Multiplicando por 2

$2 \times 34 = 68$ monedas de 10 centavos

nuestra propuesta de solución tiene solamente 12 monedas de 10 centavos; por lo que está equivocada. Pero ahora sabemos que esa condición debe ser satisfecha por la solución, por lo que podemos proponer varios números tales que el número de monedas de 10 centavos sean el doble de las monedas de 25 centavos:

34 monedas de 25 centavos y 68 monedas de 10 centavos, o bien,

16 monedas de 25 centavos y 32 monedas de 10 centavos,

propuestas en las que hemos considerado una de las condiciones del problema, la que indica que la cantidad de monedas de 10 centavos son el doble de la cantidad de monedas de 25 centavos.

Continuemos la VERIFICACION de los números propuestos, tomemos la propuesta

16 monedas de 25 centavos y 32 monedas de 10 centavos,

que cumple la parte del argumento relacionado con el doble de las monedas de 10 centavos, pero hay otra condición, al que indica que se debe tener $ 18.00 en total. VERIFIQUEMOS SI CUMPLE.

Para esta verificación se necesita calcular el total de dinero que se tiene con esas cantidades de monedas de 10 y 25 centavos ¿Cómo lo hacemos? Puede ser que usted verifique así:

$32 \times 0.10 = 3.20 \text{ pesos}$ pesos de las monedas de 10 centavos

$16 \times 0.25 = 4.00 \text{ pesos}$ pesos de las monedas de 25 centavos

en donde ha multiplicando el número de monedas (32 y 16) por el número de centavos (10 y 25) de cada moneda (centésimos de peso) y encontrando la cantidad de pesos con que contribuye cada tipo de moneda,

$$3.20 \text{ pesos} + 4.00 \text{ pesos} = 7.20 \text{ pesos}$$

para luego sumar cada contribución. Con esos cálculos se llega a la conclusión que ÉSTA SUPOSICIÓN NO ES LA SOLUCIÓN, porque al sumar sólo se tiene un total de $ 7.20 y no los $ 18.00 que se requieren.

Usemos la otra suposición hecha arriba y VERIFIQUEMOS si cumple la condición 1 que indica debemos tener $ 18.00 en total.

34 monedas de 25 centavos y 68 monedas de 10 centavos

$68 \times 0.10 = 6.80 \text{ pesos}$

$34 \times 0.25 = 8.50 \text{ pesos}$

$$6.80 \text{ pesos} + 8.50 \text{ pesos} = 15.30 \text{ pesos} \quad \clubsuit$$

cuya suma es de $ 15.30 lo que indica que NO CUMPLE LA CONDICION 1.

Note que las operaciones han sido escritas horizontalmente y no de la forma que usualmente se realizan las operaciones, es decir, generalmente escribimos una suma así:

$$\begin{array}{r} 6.80 \text{ pesos} \\ +\ 8.50 \text{ pesos} \\ \hline 15.30 \text{ pesos} \end{array}$$

pero en la línea de arriba marcada con ♣ hemos escrito la misma suma de manera horizontal. Esto lo hacemos para que la escritura sea más semejante a la escritura horizontal que se usa en álgebra, puesto que en álgebra escribimos

$a + b$ en lugar de $\begin{array}{r} a \\ +\,b \end{array}$

y en ambas escrituras se lee la misma operación. Además, en la escritura horizontal es mucho más clara la operación a efectuar y los números que intervienen en cada operación.

4. El sentido de las operaciones y cadenas de ellas

Podemos hacer todas las suposiciones que queramos, hasta que encontremos por tanteo la solución del problema, pero aquí no se pretende eso, así que avanzaremos en otra dirección. (Es posible que usted haya avanzado con otras suposiciones y haya encontrado la solución del problema por tanteo. Excelente ejercicio, pero queremos mostrarle cómo se logra escribir las ecuaciones asociadas y para eso debemos hacer otras consideraciones. Tenga paciencia y lea con atención lo que sigue).

La idea está en darnos cuenta que con la verificación de las soluciones propuestas hemos descubierto:

- las condiciones descritas en el argumento del problema,
    - las monedas de 10 son el doble de las de 25
    - el total de dinero debe ser $ 18.00

- que hemos realizado cálculos para verificar si la supuesta solución cumple o no las condiciones del argumento,

    - I) 68×0.10 y II) 34×0.25

    - III) $68 = 34 \times 2$ y IV) $68 \times 0.10 + 34 \times 0.25$

dando así sentido a los números y las operaciones involucradas. Aclaremos. La expresión I dice:

la multiplicación 68×0.10 calcula la cantidad total de pesos que se tiene en monedas de 10 centavos. Lo mismo dice la expresión II para las monedas de 25 centavos. La expresión III calcula el doble de las monedas de 25 centavos. Y la expresión 4 calcula el total del dinero que se tiene.

Las operaciones expresan las acciones que se realizarían con las cosas que los números involucrados representan. Los números representan:

68	cantidad de monedas de 10 centavos,
34	cantidad de monedas de 25 centavos,
0.25	cantidad de pesos por moneda de 25,
0.10	cantidad de pesos por moneda de 10,
2	el doble uno de otro.

Las operaciones representan:

$\times$ cuenta el total de pesos de las monedas de 10 ó 25 centavos,
$\times$ duplica las monedas de 25 centavos
$+$ cuenta el total de pesos que se tiene

Observe que en las expresiones I, II, III y IV las operaciones se han dejado indicadas, no estás efectuadas. Se ha dejado sin efectuar indicado cuáles operaciones se deben hacer y con cuáles números. El dejar indicadas las operaciones en esas expresiones permite que podamos leer lo que se calcula y cómo se hace, para que podamos verificar si es lo que se necesita para el problema, además de permitir que otra persona comprenda lo que hemos pensado sobre el problema, sobre como calcular resultados necesarios; también permite avanzar en la construcción de la ecuación al añadir el signo = para establecer la ecuación buscada.

De nuevo note que las operaciones son escritas en forma horizontal y no vertical, puesto que la escritura horizontal es más clara, más explícita en cuáles son las operaciones implicadas y entre qué cantidades, permitiendo captar el sentido de cada parte y toda la expresión. Además, la escritura horizontal permite dejar sin efectuar las operaciones, sólo indicando lo que se debe calcular, para que cada operación tenga sentido.

Ahora introduzcamos el signo = con las expresiones que tenemos. Lo que se ha verificado es que la suma de pesos que aportan las monedas de 10 y 25 centavos no es igual a los \$ 18.00 que requiere la condición 2 del problema, es decir, que la suma del dinero aportado por las monedas de 10 y de 25

$68 \times 0.10 + 34 \times 0.25$ = cantidad total de dinero con las monedas de 10 y 25 centavos.

sea de \$ 18.00

Esta expresión, indica cómo se calculará (con qué números y cuáles operaciones) la cantidad total de dinero que se tiene con los dos tipos de monedas. En ella todos los números tienen sentido y todas las operaciones también, es decir, entendemos porqué razón se proponen esas operaciones con esos números.

Es más, dado que sabemos que las monedas de 10 son el doble de las de 25, podemos escribir esto en la última expresión con la suposición de 34 monedas de 25, quedando así:

$2 \times \mathbf{34} \times 0.10 + \mathbf{34} \times 0.25$ = cantidad total de dinero *.

con lo que podemos calcular la cantidad total de dinero que se tiene con la sola suposición del número de monedas de 25 centavos, pues ya tomamos en cuenta que las de 10 son el doble. Si se colocan diferentes cantidades de monedas de 25 centavos en la expresión marcada con un *, cambiará el total de dinero que se tendrá, así:

con 12 monedas $2 \times \mathbf{12} \times 0.10 + \mathbf{12} \times 0.25 = 5.40$

con 23 monedas $2 \times \mathbf{23} \times 0.10 + \mathbf{23} \times 0.25 = 10.35$

con 52 monedas $2 \times \mathbf{52} \times 0.10 + \mathbf{52} \times 0.25 = 23.40$

si colocamos un cuadro $\boxed{}$ indicando que el lugar en donde hemos de colocar el número de monedas de 25, la expresión quedaría escrita así:

$$2 \times \boxed{} \times 0.10 + \boxed{} \times 0.25 =$$

indicando que dentro de ese cuadro $\boxed{}$ colocaremos número cualquiera, que representa la cantidad de monedas de 25 y la expresión dice lo mismo, así:

$\boxed{}$ lugar para colocar el número de monedas de 25 centavos,

$2 \times \boxed{} \times 0.10$ dinero con que contribuyen las monedas de 10 centavos,

$\boxed{} \times 0.25$ dinero con que contribuyen las monedas de 25 centavos.

quedando así para un par de valores de cantidades de monedas de 25,

$$2 \times \boxed{23} \times 0.10 + \boxed{23} \times 0.25 = 10.35$$

$$2 \times \boxed{52} \times 0.10 + \boxed{52} \times 0.25 = 23.40$$

Como queremos que la suma de las dos contribuciones sea de 18, ahora podemos indicar que un número especial colocado en el cuadro $\boxed{}$, al efectuar las operaciones debe dar como resultado 18.

$$2 \times \boxed{} \times 0.10 + \boxed{} \times 0.25 = 18.00$$

Note que hay valores que no cambian: 2, 0.10, 0.25, 18 y además las operaciones que se efectúan entre ellos son las mismas, se tiene siempre la misma “estructura”, es decir, las operaciones se mantienen entre los mismos números. El único valor que varía es el número de monedas de 25 que se coloca dentro del cuadro.

Tenemos encontrar qué número que al colocarlo en $\boxed{}$ al efectuar las operaciones da 18. Si en lugar de $\boxed{}$, que puede ocasionar confusión y es difícil de escribir, colocamos la letra V que represente el número de monedas de 25 (*V*einticinco), tenemos una ecuación.

$$2 \times V \times 0.10 + V \times 0.25 = 18 \qquad \textbf{Ecuación I}$$

la que leemos: el dinero con que contribuyen el número de monedas de 10, que son el doble de las de 25, más el dinero con que contribuyen el número de monedas de 25 da un total igual a 18 pesos.

Resolviendo la ecuación por los métodos conocidos, tenemos:

$2 \times V \times 0.10 + V \times 0.25 = 18$

$0.20 \times V + 0.25 \times V = 18$

$(0.20 + 0.25) \times V = 18$

$(0.45) \times V = 18$

$V = 18 / 0.45 = 40$

por lo que $V = 40$. Lo que indica que el número de monedas de 25 es de 40 y el número de monedas de 10 es de 80 porque son el doble de las de 25.

Comprobando: tenemos que las de 25 totalizan $ 10.00 y las de 10 totalizan $ 8.00 por lo que entre ambas totalizan $18.00 que es lo que especifica el argumento de del problema. Así hemos encontrado encontramos los dos números que son la solución del problema.

La comprobación es muy importante, pues con ella verificamos que los valores que hemos encontrado satisfacen el argumento del problema (condiciones y pregunta). La comprobación siempre debe efectuarse.

Note además que podemos saber que la ecuación **I** está correctamente escrita, pues podemos leer lo que expresa, que está de acuerdo con el argumento del problema. Cada número y cada operación tiene un sentido que se lo da el argumento del problema, que describe una situación particular descrita en el argumento.

Cuando sólo se tiene un grupo de operaciones con números sin estar relacionados con una situación particular, son sólo eso, operaciones a efectuar. Pero si están relacionados con una situación descrita en un problema, cada número y operación tienen un sentido, relacionado con a situación descrita.

Ejercicio

Resuelva los ejercicios del 3 al 5 usando las ideas que han sido expuestas y explicadas. Si puede saltarse algunos pasos y escribir la ecuación, excelente. Las soluciones a los problemas propuestos están al final.

Resolvamos otro ejemplo, escribamos la ecuación y resolvamos el problema 6.

6. A un repartidor de periódicos le toma 45 minutos entregar los periódicos que le corresponden, sin embargo, si su hermana le ayuda, le toma solamente 20 minutos ¿Cuánto tiempo le tomaría a su hermana entregar ella sola los periódicos?

1. Reconocer lo que se busca en el problema

La pregunta del problema indica que lo que se desea encontrar es EL TIEMPO QUE USARIA LA HERMANA EN ENTREGAR ELLA SOLA TODOS LOS PERIODICOS, es decir, se busca un número que es un tiempo, ya sea expresado en segundos, minutos, horas u otra medida de tiempo.

2. Suponer una solución

Supongamos 70 minutos, pues el argumento del problema usa minutos.

3. Efectuar las operaciones necesarias para verificar la supuesta solución que ha propuesto

El argumento indica que al hermano le toma 45 minutos entregar los periódicos. Pero ¿cuántos periódicos debe entregar? Como el argumento no lo indica, podemos suponer que:

deben entregar 500 periódicos

Luego veremos si los resultados cambian cuando cambia el número de periódicos.

Observe que el argumento del problema indica que si los dos trabajan juntos, tardarán en entregar los 500 periódicos 20 minutos.

¿Repartirá cada uno la mitad de los 500? Si así fuera, como el hermano reparte más rápido (se tarda 45 minutos contra 70 de la hermana) terminará antes que la hermana, por lo que puede repartir algunos periódicos de ella para terminar más rápido; así que no reparte la mitad cada uno. Note que ambos deben de terminan de repartir al mismo tiempo (ninguno de los dos descansa y deja que el otro trabaje solo), es decir, cuando trabajan juntos usan el mismo tiempo para repartir, ¿cuánto tiempo? 20 minutos indica el argumento del problema.

¿Cómo calculamos cuántos periódicos reparte cada uno en los 20 minutos? Podemos calcular cuántos reparte cada uno por minuto y multiplicarlo por 20, pero ¿Cómo calculamos cuántos reparte cada uno por minuto?

El argumento indica que el hermano reparte los supuestos 500 periódicos en 45 minutos, si dividimos tenemos:

$$\frac{500}{45} = 11.11111$$ el hermano reparte 11.11 periódicos por minuto,

para la hermana usamos la supuesta solución, 70 minutos cuando reparte ella sola los 500 periódicos

$$\frac{500}{70} = 7.142857$$ la hermana reparte 7.14 periódicos por minuto,

En 20 minutos ¿Cuántos periódicos repartirán?

En los 20 minutos el hermano reparte

$$\frac{500}{45} \times 20 = \frac{2000}{9} = 222.22222 \quad \text{periódicos,}$$

En los 20 minutos la hermana reparte

$$\frac{500}{70} \times 20 = \frac{1000}{7} = 142.85714 \quad \text{periódicos}$$

Los dos repartieron en 20 minutos

$$\frac{500}{45} \times 20 + \frac{500}{70} \times 20 = \frac{2000}{9} + \frac{1000}{7} = \frac{23000}{63} = 222.22222 + 142.85714 = 365.07936$$

periódicos y debieron repartir 500, por lo que ya sea la suposición de 70 minutos o la de 500 periódicos o ambas no están correctas.

4. El sentido de las operaciones y cadenas de ellas

En este caso las operaciones involucradas son:

I) $\frac{500}{45}$ II) $\frac{500}{70}$ III) $\frac{500}{45} \times 20$

IV) $\frac{500}{70} \times 20$ V) $\frac{500}{45} \times 20 + \frac{500}{70} \times 20$

/ para calcular cuántos periódicos por minuto reparte cada uno, I, II
× para calcular cuántos periódicos reparte cada uno en 20 minutos, III, IV
+ para encontrar el total de periódicos repartidos en 20 minutos, V

Conocemos la situación descrita en el argumento del problema, y podemos calcular cantidad de periódicos por minuto de forma análoga a como calculamos kilómetros por hora (recorridos por un automóvil) y hacemos la analogía usando la misma operación, la división y ella adquiere el mismo sentido: **rapidez con que se reparten los periódicos** análogo a **rapidez con que se recorren los kilómetros**.

También sabemos que al multiplicar la rapidez de un automóvil por el tiempo de recorrido se obtienen los kilómetros recorridos, análogamente al multiplicar la rapidez con que se reparten los periódicos por el tiempo usado en repartir se obtiene la cantidad de periódicos repartidos en ese lapso.

La suma calcula el total de periódicos repartidos en 20 minutos. Con las operaciones indicadas, todos los números y operaciones involucradas tienen sentido y este sentido está de acuerdo con el argumento del problema.

Con todo eso en mente, la expresión V indica el total de periódicos repartidos en los 20 minutos de trabajo, y este total debe ser igual al número de periódicos a repartir, por lo que la suma debe ser igual a ese total, sea el valor que sea:

$$\frac{500}{45}\times 20+\frac{500}{70}\times 20=\text{total periódicos repartidos} = 500$$

Al suponer que son 500 los periódicos a repartir, la suma no da 500. Cambiemos a 700, dejando sin cambiar los 70 minutos supuestos para la hermana y tenemos:

$$\frac{700}{45}\times 20+\frac{700}{70}\times 20=\frac{14000}{45}+\frac{14000}{70}=\frac{4600}{9}= 311.11 + 200.00 = 511.11$$

tampoco cumple. Cambiemos el tiempo de la hermana a 100 minutos y recalculemos

$$\frac{700}{45}\times 20+\frac{700}{100}\times 20=\frac{14000}{45}+\frac{14000}{100}=\frac{4060}{9}= 311.11 + 140.00 = 451.11$$

tampoco cumple.

Podemos variar ambos valores por otros y llegar a dos que cumplan, pero no queremos resolver el problema con tanteos, así que introduzcamos el cuadro $\boxed{}$

Podemos colocar un cuadro en el lugar de la cantidad de periódicos a repartir y otro en el lugar del tiempo que tarda la hermana en repartirlos ella sola, así:

$$\frac{\boxed{}}{45}\times 20+\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\times 20=\boxed{}$$

que con valores de 1000 periódicos a repartir y 80 minutos para el tiempo de la hermana, la expresión queda así:

$$\frac{\boxed{1000}}{45}\times 20+\frac{\boxed{1000}}{\boxed{80}}\times 20= 694.44 \neq \boxed{1000}$$

Note de nuevo que hay valores que no cambian: 45 y 20. Y que la forma de calcular si las suposiciones satisfacen o no las condiciones requieren las mismas operaciones, de nuevo la “estructura” es la misma. Lo que varía en este caso es el número de periódicos a repartir y el tiempo que emplea la hermana en repartirlos ella sola.

Además el cuadro en cuál se escribe el número de periódicos a repartir y el cuadro en cuál se escribe el tiempo de la hermana son iguales, se confunden, por lo que mejor colocaremos letras: ***P*** para ***P***eriódicos y ***T*** para ***T***iempo de la hermana, quedando así:

$$\frac{P}{45}\times 20+\frac{P}{T}\times 20=P$$

que es igual a:

$$P\times\left(\frac{1}{45}\times 20+\frac{1}{T}\times 20\right)=P$$

Expresión en la cual se nota que se puede cancelar *P*

$$1\times\left(\frac{1}{45}\times 20+\frac{1}{T}\times 20\right)=1$$

por lo que no encontraremos el número de periódicos ***P*** a entregar. Ahora resolvemos la ecuación que nos quedó

$$\frac{1}{45}\times 20+\frac{1}{T}\times 20=1$$

$$\frac{20}{45}+\frac{20}{T}=1$$

$$\frac{20}{T}=1-\frac{20}{45}=\frac{25}{45}$$

$$\frac{20\times 45}{25}=T=36 \quad \text{minutos.}$$

Verifiquemos si el valor de 36 minutos cumple con la condición de reparto de todos los periódicos en 20 minutos, cuando trabajan los dos juntos. Suponiendo que deben repartir 500 periódicos se tiene:

$$\frac{500}{45}\times 20+\frac{500}{36}\times 20=\frac{10000}{45}+\frac{10000}{36}=\frac{4500}{9}=500$$

si reparten todos los 500 periódicos. Suponiendo que deben repartir 700 periódicos se tiene:

$$\frac{700}{45}\times 20+\frac{700}{36}\times 20=\frac{14000}{45}+\frac{14000}{36}=700$$

también cumple con 700 periódicos. Si queremos colocar diferentes cantidades de periódicos a repartir colocamos el cuadro en donde va esa cantidad así:

$$\frac{\boxed{}}{45}\times 20+\frac{\boxed{}}{36}\times 20=\boxed{}$$

$$\frac{\boxed{}}{45}\times 20+\frac{\boxed{}}{36}\times 20=\boxed{}$$

Recuerde que expresión de la izquierda del signo igual, la expresión sobre la línea roja, calcula el número de periódicos que reparten los hermanos cuando trabajan juntos y que ese resultado debe ser igual al número de periódicos por repartir, que es la expresión de la derecha de la igualdad, sobre la línea azul. Si son iguales se cumple la condición que en 20 minutos los dos hermanos trabajando juntos reparten todos los periódicos.

Como en los cuadros colocamos un número, por ejemplo 1000, la expresión de la izquierda del signo igual la podemos transformar así:

$$\frac{\boxed{1000}}{45}\times 20+\frac{\boxed{1000}}{36}\times 20=$$

$$\boxed{1000}\left(\frac{20}{45}+\frac{20}{36}\right)=\boxed{1000}\times 1=\boxed{1000}$$

por lo que para cualquier cantidad de periódicos que tengan que repartir se cumplirá que los reparten todos, es decir, podemos colocar cualquier cantidad en el cuadro que siempre dará esa misma cantidad como total de periódicos repartidos, pues está multiplicada por 1.

Luego, 36 minutos si es la solución del problema. La hermana tarda ella sola en repartir los periódicos 36 minutos. La comprobación es muy importante, pues con ella verificamos que los valores que hemos encontrado satisfacen el argumento del problema. La comprobación siempre debe efectuarse.

Observación final

Como se ha observado, en este tipo de problemas (y en la mayoría de otros tipos), un problema consta de varios componentes:

- ✓ Lo que se desea encontrar, obtener, construir,
- ✓ una o más condiciones que se deben satisfacer por los valores que se desea encontrar y que hará que esos valores sean la solución, que se reconocen como condiciones del problema,
- ✓ datos para el problema,
- ✓ la descripción de una situación, que será la que dará sentido a las cantidades y operaciones que se realizarán con esas cantidades. La situación debe ser conocida y comprendida para proponer las operaciones necesarias. Esa situación se denomina el contexto del problema e indica cuáles son las operaciones que se consideran adecuadas a usar, porque tienen sentido en ese contexto. En problemas con contexto de física las operaciones tienen el sentido que tienen en física, en química las operaciones tienen el sentido que tienen es química.

Escritura directa de la ecuación

Sabiendo que las operaciones tienen sentido, dado por el contexto, podemos luego de leer con cuidado el problema, colocar una letra al valor que se desea encontrar, la denominada incógnita y sabiendo que ella es un número y usarlas como tales. Por ejemplo,

2. Una mujer de negocios desea invertir $ 30,000.00 en dos fondos diferentes que producen ganancias anuales de 13% y 15.5%, respectivamente ¿Cuánto debe invertir en cada fondo para obtener una ganancia de $ 4,350.00 después de un año?

Qué se desea encontrar:

Se necesitan dos números que son las inversiones, llamémoslas A y B.

Las condiciones son:

Que A y B suman $ 30,000 que es el dinero a invertir, y
que deben producir $ 4,350 de intereses.

Datos:

$ 30,000 inversión $ 4350 intereses 13 % interés de A 15.5 % interés de B

Contexto:

Situación bancaria, de intereses, porcentajes, etcétera.

Con eso en mente, se tiene que:

$A + B = 30000$ el monto total a invertir se parte en dos cantidades no necesariamente iguales.

$0.13 \times A + 0.155 \times B = 4350$ la suma de intereses debe ser 4350.

Note que todas las operaciones tienen sentido, que las ecuaciones tienen sentido y que lo que el problema requiere está expresado en esas ecuaciones.

Resolviendo se tiene:

$A = 30000 - B$

$0.13\ (30000 - B) + 0.155\ B = 4350$

$3900 - 0.13\ B + 0.155\ B = 4350$

$0.025\ B = 4350 - 3900 = 450$

$B = 450 / 0.025 = 18000$ por lo que $A = 30000 - 18000 = 12000$

Comprobemos: 18000 al 15.5 % 12000 al 13 %

$18000 + 12000 = 30000$ OK Condición 1

$18000 \times 0.155 = 2790$

$12000 \times 0.13 = 1560$

$2790 + 1560 = 4350$ OK Condición 2

Esa es la solución, colocar $ 18,000 en la cuenta que rinde 15.5 % de intereses y colocar $ 12,000 en la cuenta que rinde 13 % de intereses.

<u>Ejercicio</u>
Resuelva los problemas del 7 al 10.

NOTA:
Las soluciones a los problemas están en el documento "Soluciones del curso escritura de ecuaciones" en la siguiente página: http://www.cimacien.org.gt